Séance 1 — 45 min environ, hors vérification. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier. Aucune démonstration n'est au programme pour ce chapitre : celles du cours complet ne sont pas projetées.

Page de garde — Partie 1 *1 min*

Anecdote La citation vient de *Récoltes et semailles*, longue méditation de plus de mille pages que Grothendieck écrit entre 1983 et 1986 sur sa vie de mathématicien. Le texte circule d'abord en photocopies ; il n'est publié qu'en 2022, chez Gallimard. *(A. Grothendieck,* Récoltes et semailles, *Gallimard, 2022)*

I. Définition — Définition et théorème *8 min*

Au tableau On lit $p_A(B)$ « p de B sachant A » : on ne regarde plus que les issues où A est réalisé, et l'on mesure la part de B parmi elles, d'où $p(A)$ au dénominateur. Remarque essentielle : $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; une valeur hors de cet intervalle signale une erreur.
Théorème : on multiplie les deux membres de la définition par $p(A)$, ce qui est permis car $p(A) \neq 0$: $\quad p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Anecdote La barre verticale de l'écriture internationale $P(B \mid A)$ apparaît chez le géophysicien Harold Jeffreys en 1931 ; l'écriture $p_A(B)$ du lycée met en indice l'évènement que l'on sait réalisé. *(H. Jeffreys,* Scientific Inference, *1931 ; J. Miller,* Earliest Uses of Symbols in Probability and Statistics*)*

Exemple 1 — le test de dépistage *4 min*

Au tableau « La probabilité qu'une personne ait un test positif *sachant* qu'elle est contaminée est $0{,}99$ » : l'évènement connu est C, d'où $\quad p_C(P) = 0{,}99$.
« Une personne contaminée a un test positif » dit la même chose.

Anecdote Les mots *sensibilité* et *spécificité* d'un test sont introduits en 1947 par le statisticien Jacob Yerushalmy, qui compare des lectures de radiographies pulmonaires pour le dépistage de la tuberculose. *(J. Yerushalmy,* Public Health Reports, *62, 1947)*

Exemple 2 — une intersection *5 min*

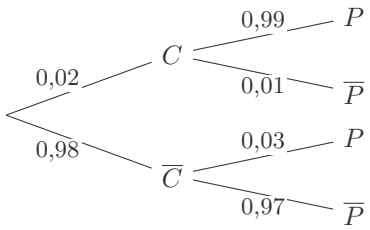
Au tableau D'après le théorème : $\quad p(C \cap P) = p_C(P) \times p(C) = 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0198$.
La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit contaminée **et** ait un test positif est $0{,}0198$.
Bilan : une probabilité se lit dans l'énoncé (exemple 1) ou se calcule (exemple 2).

II. Arbres pondérés — le vocabulaire *5 min*

Au tableau Montrer sur l'arbre projeté : les deux *niveaux*, les *branches*, les *nœuds*, et l'issue au bout de chaque chemin. Au premier niveau, des probabilités « simples » ; au second, des probabilités conditionnelles : chaque branche part d'un nœud qui est l'évènement connu.

Règle de la somme, exemple 3 *8 min*

Au tableau Règle de la somme, au nœud de départ comme aux nœuds du second niveau :
$p(\overline{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$
$p_C(\overline{P}) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$
$p_{\overline{C}}(P) = 1 - p_{\overline{C}}(\overline{P}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$
Contrôle : les deux branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.



Règle du produit *4 min*

Au tableau Un *chemin* est une suite de branches : l'arbre de l'exemple 3 en a quatre. La règle du produit n'est autre que le théorème : le long du chemin C puis P, $p(C \cap P) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$, la valeur de l'exemple 2.

Anecdote Le raisonnement « à rebours », de l'effet observé vers la cause, remonte à l'essai du pasteur Thomas Bayes, publié après sa mort par son ami Richard Price en 1763 : c'est ce que fera l'exemple 4. *(T. Bayes,* An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, Philosophical Transactions, 1763)*

Exemple 4 — l'arbre inverse *8 min*

Au tableau $p_P(C)$ ne figure pas sur l'arbre : retour à la définition, avec $p(P) = 0{,}0492$ admis.

$$p_P(C) = \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} = \frac{198}{492} = \frac{6 \times 33}{6 \times 82} = \frac{33}{82} \approx 0{,}40$$

La probabilité qu'une personne soit contaminée sachant que son test est positif est $\frac{33}{82}$, environ $0{,}40$: six personnes positives sur dix environ ne sont pas contaminées, alors que $p_C(P) = 0{,}99$. Insister : $p_P(C) \neq p_C(P)$.

Anecdote En 1978, soixante médecins et étudiants des hôpitaux universitaires de Harvard doivent estimer cette probabilité pour une maladie touchant une personne sur mille et un test à 5 % de faux positifs. La réponse la plus fréquente est 95 % ; la bonne, voisine de 2 %, n'est donnée que par environ un participant sur cinq. *(W. Casscells, A. Schoenberger, T. Graboys,* New England Journal of Medicine*, 299, 1978)*